Exercice 3

Exercice 3

Déterminer la nature du triangle ABC dans chacun des cas suivants:

1) $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 2) $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = i$ 3) $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

4) $\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} = 2i$ 5) $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

Solution

	Relation complexe	Nature du triangle ABC	Justification
1	$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$	equilateral	car $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\pi/3}$
2	$\frac{Z_B - Z_C}{Z_B - Z_A} = i$	Rectangle isocéle	car le rapport $= i$
3	$\frac{Z_C - Z_B}{Z_A - Z_B} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$	equilateral	car $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\pi/3}$
4	$\frac{Z_C - Z_A}{Z_C - Z_B} = 2i$	Rectangle en C	imaginaire pur
5	$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$	isocéle en A	$\left\lvert \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2} \right\rvert = 1$

http://maurimath.net/Espaceeleves.php

Exercice 6

Dans $\mathbb{C}$ on donne : $a = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}$

1) Calculer a^2. Donner le module et un argument de a^2

2) En déduire le module et un argument de a.

3) En déduire $\cos\frac{5\pi}{12}$, $\sin\frac{5\pi}{12}$.

4) Donner les entiers naturels n tels que a^n soit réel.

Solution

1) On a : $a^2 = \left(\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}\right)^2$

$a^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{2} + 2i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2} \times \frac{2+\sqrt{3}}{2}} - \frac{2+\sqrt{3}}{2}$ $a^2 = \frac{-2\sqrt{3}}{2} + 2i\sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow$

$a^2 = -\sqrt{3} + i$

• Module : $|a^2| = |-\sqrt{3}+i| = \sqrt{3+1} \Rightarrow |a^2| = 2$

• Argument : Soit θ un réel tel que $\arg a^2 = \theta$

Alors : $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \arg a^2 = \frac{5\pi}{6}$

2.a) Module et argument de a :

• Module : $|a^2| = 2 \Rightarrow |a| = \sqrt{2}$

• Argument : $\arg a^2 = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow 2\arg a = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

$\arg a = \frac{5\pi}{12} + k\pi$, $k \in \{0, 1\}$

Soit $k = 0 \Rightarrow \arg a = \frac{5\pi}{12}$

Soit $k = 1 \Rightarrow \arg a = \frac{5\pi}{12} + \pi = \frac{17\pi}{12}$

Comme $Re(a) > 0$ et $Im(a) > 0$, $\arg a \neq \frac{17\pi}{12}$.

Enfin, $\arg a = \frac{5\pi}{12}$

3) D'après ce qui précède, on déduit que :

$$\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos\frac{5\pi}{12}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$$

$$\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin\frac{5\pi}{12}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$$

4) Le nombre a^n est réel si et seulement si $\arg a^n = k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$:

$$\arg a^n = k\pi \Leftrightarrow \frac{5n\pi}{12} = k\pi \Leftrightarrow 5n = 12k \Leftrightarrow n = \frac{12k}{5}$$

n est un entier naturel et le nombre 12 n'est pas divisible par 5, donc k est divisible par 5.

On prend $k = 5k'$ avec $k' \in \mathbb{Z}$.

Alors $\arg a^n = k\pi \Leftrightarrow n = 12 \times \frac{k}{5} \Leftrightarrow n = 12k'$

L'ensemble des valeurs de n tels que a^n soit réel c'est les multiples de 12

Exercice 9

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$z^{2016} = \bar{z}$

Solution

$E : z^{2016} = \bar{z}$

on remarque que 0 est une solution evidente

on parppare dans la suite que $z \neq 0$

$E \Rightarrow |z^{2016}| = |\bar{z}| \Rightarrow |z|^{2016} = |z|$ on par $|z|$

$\Rightarrow |z|^{2015} = 1 \Rightarrow |z| = 1$ car $|z| \in \mathbb{R}_+^*$

On Multiple E par z :

$z \cdot z^{2016} = z \cdot \bar{z} \Rightarrow z^{2017} = z\bar{z}$

or $z\bar{z} = |z|^2$, donc $z^{2017} = 1$ racines n'eme de l'unite $i\frac{2k\pi}{2017}$

$z_k = e^{i\frac{k\pi}{2017}}$; $k \in \{0, 1, \dots, 2016\}$

$z_0 = 1$, $z_1 = e^{\frac{ik\pi}{2017}}$

Conlusion : E admet 2018 solution distanctes

$$S = \{0, z_0, z_1, \dots z_{2016}\}$$

Exercice 12

α et x sont deux réels ; et n entier $n \geq 1$.

1) Simplifier les expressions suivantes:

$$C_n = \cos\alpha + \cos(x+\alpha) + \cos(2x+\alpha) + \cdots + \cos(nx+\alpha)$$

$$S_n = \sin\alpha + \sin(x+\alpha) + \sin(2x+\alpha) + \cdots + \sin(nx+\alpha)$$

2) En déduire :

$$C'_n = \cos(x+\alpha) + 2\cos(2x+\alpha) + \cdots + n\cos(nx+\alpha)$$

$$S'_n = \sin(x+\alpha) + 2\sin(2x+\alpha) + \cdots + n\sin(nx+\alpha)$$

Solution

$$C_n = \cos\alpha + \cos(x+\alpha) + \cos(2x+\alpha) + \cdots + \cos(nx+\alpha)$$

$$S_n = \sin\alpha + \sin(x+\alpha) + \sin(2x+\alpha) + \cdots + \sin(nx+\alpha)$$

$$C_n + iS_n = (\cos\alpha + i\sin\alpha) + (\cos(x+\alpha) + i\sin(x+\alpha)) + \cdots + \cos(nx+\alpha) + i\sin(nx+\alpha)$$

$$e^{i\alpha} + e^{i(\alpha+x)} + e^{i(\alpha+2x)} + \cdots + e^{(\alpha+n+x)}$$

$$= e^{i\alpha}\left[1 + e^{ix} + e^{i2x} + \cdots + e^{inx}\right]$$

$$= e^{i\alpha}\left[\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}\right]$$

2) $C_n + iS_n = \cos^2 x + \cos^2 x \cdot \cos 2x + \cdots \cos^n x \cdot \cos nx +$

$i(\cos x \sin x + \cos^2 x \sin 2x + \cdots + \cos^n x \sin nx)$

$= (\cos^2 x + i\cos x \sin x) + (\cos^2 x \cos 2x + i\cos^2 x \sin 2x) + \cdots (\cos^n x \cos nx +$

$\cos^n x \sin nx) = \cos x\, e^{ix} + \cos^2 x\, e^{i2x} + \cdots + \cos^n x\, e^{nix}$

$$= \frac{1-(\cos x\, e^{ix})^n}{1-\cos x\, e^{ix}} \times \cos x\, e^{ix}$$

$$\cos x\, e^{ix} = \frac{1}{2}(2\cos x\, e^{ix}) = \frac{1}{2}(1+e^{2ix})$$

$$C_n + iS_n = \frac{1}{2}(1+e^{2ix})\left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n(1+e^{2ix})^n}{1-\frac{1}{2}(1+e^{i2x})}\right]$$

Exercice 15

Montrer que Les points M_1, M_2, M_3 d'affixes z_1, z_2, z_3, sont alignés si et Seulement si :

$$z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_1 = \bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_2 z_3 + \bar{z}_3 z_1 .$$

Solution

$M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$, $M_3(z_3)$

M_1, M_2 et M_3 sont alignés $\Leftrightarrow (\overrightarrow{M_3M_1}, \overrightarrow{M_3M_2}) = 0[\pi]$

$$\Rightarrow \arg \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} = 0[\pi] \Leftrightarrow \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} \in \mathbb{R}^*$$

$$\Rightarrow \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} = \left(\overline{\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}}\right) \Rightarrow \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} = \frac{\bar{z}_2 - \bar{z}_3}{\bar{z}_1 - \bar{z}_3}$$

$$\Rightarrow (z_2 - z_3)(\bar{z}_1 - \bar{z}_3) = (z_1 - z_3)(\bar{z}_2 - \bar{z}_3)$$

$$z_2\bar{z}_1 - z_2\bar{z}_3 - z_3\bar{z}_2 + z_3\bar{z}_3 = z_1\bar{z}_2 - z_3\bar{z}_2 + z_3\bar{z}_3$$

$$z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_3 + z_3\bar{z}_1 = \bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_2 z_3 + \bar{z}_0 z_1$$

Exercice 18

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 3 cm).
On désigne par A ; B et C les points d'affixes respectives 1+5i ;-1+i et 3i.
Soit f l'application qui à tout point M du plan P, distinct de C, d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par : $z'=\dfrac{3iz+6+4i}{z-3i}$. On note f(M)=M'.

1) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z dans les cas suivants :

a) $|z'|=3$

b) $|z'-3i|=3$

c) $z'\in\mathbb{R}$

d) $\arg z'=\dfrac{\pi}{3}\quad[2\pi]$

e) $\arg z'=\dfrac{\pi}{2}\quad[\pi]$.

2) Montrer que les points A ;B ;M et M' sont cocycliques ou alignés.

Solution

1) Ensembles de Points

a) Soit E_1 l'ensemble des points M du plan tels que $|z'|=3$

On a : $|z'|=3 \Rightarrow \left|\dfrac{3iz+6+4i}{z-3i}\right|=3$

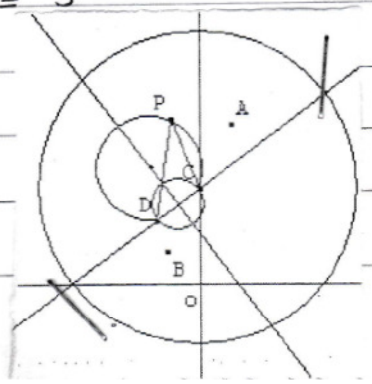
Alors $\left|\dfrac{3i\left(z+\dfrac{6+4i}{3i}\right)}{z-3i}\right|=3$. d'où $|3i|\left|\dfrac{z+\dfrac{6+4i}{3i}}{z-3i}\right|=3$

$\left|\dfrac{z+\dfrac{4}{3}-2i}{z-3i}\right|=1$. E_1 donc, est médiatrice du Segment [DC] où $D\left(-\dfrac{4}{3},2\right)$

b) Soit E_2 l'ensemble des points M du plan tels que $|z'-3i|=3$.

On a : $|z'-3i|=3 \Rightarrow \left|\dfrac{3iz+6+4i}{z-3i}-3i\right|=3$

$\Rightarrow \left|\dfrac{3iz+6+4i-3iz-9}{z-3i}\right|=3$



$$\left|\frac{-3+4i}{z-3i}\right| = 3 \Leftrightarrow \left|\frac{5}{z-3i}\right| = 3 \Leftrightarrow |z-3i| = \frac{5}{3} \text{ soit}$$

$$|z_M - z_C| = \frac{5}{3}$$

E_2 donc, est le cercle de centre C et de rayon $\frac{5}{3}$

c) soit E_3 l'ensemble des points M du plan tels que $z' \in \mathbb{R}$. On a :

$$z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left(z' = 0 \text{ ou } \arg \frac{3iz+6+4i}{z-3i} = 0\,[\pi] \right)$$

Soit $z' = 0 \Leftrightarrow 3iz + 6 + 4i = 0 \Leftrightarrow -\frac{4}{3} + 2i$

$\Leftrightarrow M = D$

Soit $\arg \frac{3iz+6+4i}{z-3i} = 0\,[\pi] \Leftrightarrow \arg 3i + \arg \frac{z + \frac{6+4i}{3i}}{z-3i}$

$= 0\,[\pi] \Leftrightarrow \arg \frac{z+\frac{4}{3}-2i}{z-3i} = \frac{\pi}{2}\,[\pi] \Rightarrow$

$$\arg \frac{z_M - z_D}{z_M - z_C} = \frac{\pi}{2}\,[\pi] \Rightarrow (\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}) = \frac{\pi}{2}\,[\pi]$$

M appartient au cercle de diamètre $[CD]$ privé de C et D. En particulier si M est en D, $z' = 0$.

Enfin, E_3 est le cercle de diamètre $[CD]$ privé de C

d) Soit E_4 l'ensemble des points M du plan tels que $\arg z' = \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$. On a :

$$\arg z' = \frac{\pi}{3}\,[2\pi] \Leftrightarrow \arg 3i + \arg \frac{z + \frac{6+4i}{3i}}{z-3i} = \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + \arg \frac{z+\frac{4}{3}-2i}{z-3i} = \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg \frac{z_M - z_D}{z_M - z_C} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\,[2\pi] \Rightarrow \arg \frac{z_M - z_D}{z_M - z_C} = -\frac{\pi}{6}\,[2\pi]$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}) = -\frac{\pi}{6}\,[2\pi]$$

E_4 donc, est un arc (de sens indirect) d'un cercle d'extrémités C et D exclues.

e) Soit E_5 l'ensemble des points M du plan telque $\arg z' = \frac{\pi}{2} [\pi]$. On a

$$\arg z' = \frac{\pi}{2} [\pi] \iff \frac{\pi}{2} + \arg \frac{z + \frac{4}{3} - 2i}{z - 3i} = \frac{\pi}{2} [\pi] \iff$$

$$\arg \frac{z_M - z_D}{z_M - z_C} = 0 [\pi] \iff (\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}) = 0 [\pi]$$

E_5 donc, est la droite (CD) privée de C et D.

2) Pour montrer que les points A ; B ; M et M' sont cocycliques ou alignés, il suffit de montrer que le nombre Z tel que : $Z = \frac{z' - z_A}{z' - z_B} \times \frac{z - z_B}{z - z_A}$ soit réel.

$$\text{On a : } Z = \frac{\frac{3iz + 6 + 4i}{z - 3i} - 1 - 5i}{\frac{3iz + 6 + 4i}{z - 3i} + 1 - i} \times \frac{z + 1 - i}{z - 1 - 5i} \iff$$

$$Z = \frac{\frac{3iz + 6 + 4i - z + 3i - 5iz - 15}{z - 3i}}{\frac{3iz + 6 + 4i + z - 3i - iz - 3}{z - 3i}} \times \frac{z + 1 - i}{z - 1 - 5i}$$

$$\iff Z = \frac{-2iz - z + 7i - 9}{2iz + z + i + 3} \times \frac{z + 1 - i}{z - 1 - 5i} \iff$$

$$Z = \frac{(-2i - 1)z + 7i - 9}{(2i + 1)z + i + 3} \times \frac{z + 1 - i}{z - 1 - 5i}$$

$$\Rightarrow \frac{(-2i - 1)\left(z + \frac{7i - 9}{-2i - 1}\right)}{(2i + 1)\left(z + \frac{i + 3}{2i + 1}\right)} \times \frac{z + 1 - i}{z - 1 - 5i} \Rightarrow$$

$$Z = \frac{-\left(z + \frac{7i - 9}{-2i - 1}\right)}{z + \frac{i + 3}{2i + 1}} \times \frac{z + 1 - i}{z - 1 - 5i} \Rightarrow Z = \frac{-(z - 1 - 5i)}{z + 1 - i} \times \frac{z + 1 - i}{z - 1 - 5i}$$

$Z = -1$ d'où $Z \in \mathbb{R}^*$

Alors les points A, B, M et M' sont cocycliques ou alignés

Exercice 21 | Bac

1) Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, on pose: $P(z)=z^3+(2-2i)z^2+(-2-8i)z-8+4i$.

a) Calculer $P(2i)$.

b) Résoudre l'équation $P(z)=0$.

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère la transformation f d'expression : $z'=\frac{1}{3}iz+\frac{2}{3}+2i$.

a) Montrer que f est une similitude directe. Préciser le centre A, le rapport et un angle de f.

b) Calculer l'affixe z_C du point C image de B(-1,-3) par f. Vérifier que le triangle ABC est rectangle. Placer les points A, B et C sur la figure.

c) Calculer l'affixe z_G du point G barycentre du système $S=\{(A,2);(B,3);(C,-1)\}$.

3.a) Déterminer puis construire les trois ensembles Γ_1, Γ_2 et Γ_3 des points M du plan définis par :

$$M\in\Gamma_1 \Leftrightarrow 2MA^2+3MB^2-MC^2=16$$
$$M\in\Gamma_2 \Leftrightarrow MB^2-MC^2=16$$
$$M\in\Gamma_3 \Leftrightarrow (2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}).(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC})=0$$

b) Que peut-on dire à propos de la position relative des deux ensembles Γ_2 et Γ_3 ?

Solution

a) $P(2i)=0$

b) $P(z)=0$

$P(z)=(z-2i)(z^2+az+b)$

	1	2-2i	-2-8i	-8+4i
2i		2i	4i	8-4i
	1	2	-2-4i	0

$P(z)=(z-2i)(z^2+2z-8-4i)$

$\Delta=4-4(-8-4i)=12+16i$

$$\begin{cases} x^2-y^2=12 \\ x^2+y^2=20 \\ x \text{ et } y \text{ sont le même signe} \end{cases}$$

$2x^2=32 \iff x^2=\pm\sqrt{16}=\pm4$

$2y^2=8 \iff y^2=4 \Rightarrow y=2$

$\delta=4+2i$

$z_1=\frac{-2+4+2i}{2}=1+i$

$z_2=\frac{-2-4-2i}{2}=-3-i$

$S=\{2i,\ 1+i,\ -3-i\}$

2) $f(M)=M'=z'=\frac{1}{3}iz+\frac{2}{3}+2i$
$=az+b$

a) Montrer que f est une similitude directe :

Comme $|a|=|\frac{1}{3}|\neq 1$

alors f est similitude directe de centre A

$z_A=\frac{b}{1-a}=\frac{\frac{2}{3}+2i}{1-\frac{1}{3}i}$

$z_A=2i$

Rapport : $k=|a|=\frac{1}{3}$

angle $\theta=\arg(a)=\arg(\frac{1}{3}i)$
$=\frac{\pi}{2}$

$f=S(A,\frac{1}{3},\frac{\pi}{2})$